











Lugares Geométricos: Procedimientos para su resolución.

En molts dels aspectes de la vida, fer les coses a poc a poc s'associa amb un profund plaer. Si volem que el nostre alumnat, en el seu procés educatiu, puguin comprendre en profunditat la varietat de l'experiència humana i aprendre com poden contribuir-hi, hem de donar-los la oportunitat de fer-ho.

Elogi de l'educació lenta.
Domènech, J. (2009)

A. Determinar el lugar geométrico a partir de los elementos del problema. Construye una parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de un punto (foco de la parábola).

Nº	Nombre	Ico...	Definición	Valor	Comando
1	Punto A			$A = (4.84, 1.34)$	
2	Recta r		Recta que pasa por (0.4, -4.3), (3.4, -3.3)	$r: -x + 3y = -13.3$	Recta[(0.4, -4.3), (3.4, -3.3)]
3	Punto B		Punto sobre r	$B = (2.52, -3.59)$	Punto[r]
4	Recta b		Recta que pasa por B perpendicular a r	$b: -3x - y = -3.96$	Perpendicular[B, r]
5	Segmento c		Segmento [A, B]	$c = 5.45$	Segmento[A, B]
6	Recta d		Mediatriz c	$d: 2.32x + 4.93y = 2.98$	Mediatriz[c]
7	Punto C		Punto de intersección de b, d	$C = (1.33, -0.02)$	Interseca[b, d]
8	Segmento e		Segmento [C, A]	$e = 3.77$	Segmento[C, A]
9	Segmento f		Segmento [C, B]	$f = 3.77$	Segmento[C, B]
10	Lugar Geométrico lugar1		LugarGeométrico[C, B]	$\text{lugar1} = \text{LugarGeométrico}[C, B]$	LugarGeométrico[C, B]

B. Determinar el lugar geométrico valiéndose de elementos auxiliares al enunciado del problema. Construye una espiral con un parámetro que indique el número de vueltas.

Nº	Nombre	Definición	Subtítulo
1	Número k		
2	Número n		Número de vueltas de la espiral
3	Número r		Radio inicial
4	Punto A		Punto auxiliar
5	Punto B	$(n \cdot 2\pi, -5)$	Punto auxiliar
6	Segmento a	Segmento [A, B]	Segmento auxiliar
7	Punto C	Punto sobre a	
8	Número θ	$x(C)$	Definimos el parámetro θ
9	Punto P	$(r \cdot e^{(\theta / k)}; \theta)$	Coordenadas polares
10	Lugar Geométrico ...	LugarGeométrico[P, C]	

C. Uso de la Hoja de cálculo para presentar procesos recursivos. Modelizar una persecución de dos móviles con dos parámetros que determinen sus velocidades.

Nº	Nombre	Icono ...	Definición	Valor	Comando
1	Número i			$i = 3.6$	
2	Número n			$n = 2.7$	
3	Punto A1			$A1 = (10, 0)$	
4	Punto B1			$B1 = (0, 0)$	
5	Vector C1		Vector[B1, A1]	$C1 = (10, 0)$	Vector[B1, A1]
6	Vector D1		Vector Unitario de C1	$D1 = (1, 0)$	VectorUnitario[C1]
7	Punto A2		$A1 + (0, i)$	$A2 = (10, 3.6)$	$A1 + (0, i)$
8	Punto B2		$B1 + n D1$	$B2 = (2.7, 0)$	$B1 + n D1$
9	Vector C2		Vector[B2, A2]	$C2 = (7.3, 3.6)$	Vector[B2, A2]
10	Vector D2		Vector Unitario de C2	$D2 = (0.9, 0.44)$	VectorUnitario[C2]

D. Realizar una herramienta que permita comprobar si un punto determinado del plano cumple una condición.

Nº	Nombre	Ico...	Definición	Comando	Valor	Subtítulo
1	Circunferencia c		Circunferencia con centro (0, 0) y radio 5	Circunferencia[(0, 0), 5]	$c: x^2 + y^2 = 25$	
2	Punto A				$A = (5.08, -2.6)$	Muestra Rastro: activado Avanzado: R=1; V=Tr; A=Tr
3	Número δ				$\delta = 5$	
4	Número Obj		$x(A)^2 + y(A)^2 - 25$	$x(A)^2 + y(A)^2 - 25$	Obj = 7.58	
5	Número Tr		Si[Obj < -2 δ , 1, Si[Obj > 2 δ , 1, 0]]	Si[Obj < -2 δ , 1, Si[Obj > 2 δ , 1, 0]]	Tr = 0	
6	Número Gr		Si[Tr \neq 0, 2 δ , 1]	Si[Tr \neq 0, 2 δ , 1]	Gr = 10	Guión: TamañoPunto[A, Gr]
7	Circunferencia d		Circunferencia con centro A y radio 0.2	Circunferencia[A, 0.2]	$d: (x - 5.08)^2 + (y + 2.6)^2 = 0.04$	A

E. Uso de listas para determinar envolventes de familias de curvas. Hallar la envolvente de los segmentos de longitud constante d que tienen sus extremos en los ejes.

Nº	Nombre	Icono...	Definición	Subtítulo
1	Número d			Longitud del segmento
2	Número n			Número de segmentos
3	Número int		$d / (n + 1)$	
4	Lista lista1		Secuencia[Segmento[(i int, 0), (0, sqrt(d ² - i ² int ²))], i, 1, n]	Secuencia[<Objeto>, <Variable entera>, <Valor inicial>, <Valor final>]
5	Lista lista2		Secuencia[Segmento[(-i int, 0), (0, sqrt(d ² - i ² int ²))], i, 1, n]	
6	Lista lista3		Secuencia[Segmento[(i int, 0), (0, -sqrt(d ² - i ² int ²))], i, 1, n]	
7	Lista lista4		Secuencia[Segmento[(i int, 0), (0, -sqrt(d ² - i ² int ²))], i, 1, n]	

F. Uso de Geogebra para comprobar las soluciones obtenidas analíticamente.

Problemas de lugares geométricos

1 - 88.10 (A)

Un punto A se mueve sobre una circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$ y otro punto B se mueve sobre el eje OX, siendo la distancia entre los dos puntos A y B de 9. Hallar el lugar geométrico del punto medio del segmento AB.

2 - 88.16

Se dan los puntos A(a,0) y B(0,b) tales que $a+b=2d$ (d constante). Sobre AB como diagonal se construye un cuadrado cuyos otros vértices son C y D. Probar que al variar a y b, uno de estos vértices se mantiene fijo, y hallar el lugar geométrico determinado por el otro.

3 - 88.50 (B)

Hallar el lugar geométrico de los puntos, P, del plano cuyas distancias a dos puntos fijos, F y F', están en una razón, r, dada. Discutir la solución según los valores de r.

4 - 88.89 (C)

Se ata un cuerpo pesado (reducido a un punto) a un hilo de longitud a, y se le sitúa en el punto P(a,0) de un plano horizontal. Se hace recorrer al otro extremo del hilo el eje Y. Hallar la ecuación de la curva que recorre el cuerpo.

5 - 88.111

Se considera la circunferencia $x^2+y^2-2ax=0$. se traza por el origen O una recta que corta a la circunferencia en un punto P. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de la tangente a la circunferencia en P con la perpendicular por O a la recta OP.

6 - 89.22

Dadas dos circunferencias en el plano, cuya posición relativa es la de tangentes exteriores, estudiar el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas, sabiendo que una de ellas tiene el radio doble que la otra.

7 - 89.26

Desde un punto fijo A(a,0) se trazan secantes a una circunferencia de centro (0,0) y radio R.

- hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas.
- Representar dicho lugar.
- Calcular la superficie común al círculo y al lugar geométrico calculado.

8 - 89.94

Una circunferencia variable C es tangente al eje de abscisas en el punto A(-1,0). Sea r la recta tangente a C en el punto diametralmente opuesto a A, y s es la tangente a C distinta de OX que pasa por B(1,0). Hallar el lugar geométrico de los puntos de intersección de r y s.

9 - 89.99

Sea una circunferencia de centro en el origen de coordenadas, y radio a . Sea AB un diámetro. Trácese por A una recta cualquiera, que corta a la circunferencia en un punto C . Tómese sobre la recta un punto P de forma que C esté entre A y P , y la distancia $d(C, P)=k>0$. Hallar el lugar geométrico del punto P .

10 - 90.04

Hallar el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ven dos circunferencias bajo ángulos iguales.

11 - 90.10

Dada la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 2 , se trazan por el origen dos rectas variables que forman entre sí un ángulo de 30° . Sean A y B los puntos medios de las cuerdas que cada una de ellas intercepta en la circunferencia. Sea M el punto medio de AB . Hallar el lugar geométrico de los puntos M .

12 - 90.42

Sobre el eje OY de un sistema rectangular existen puntos B, B' , distantes del origen b . Si se une B con un punto P de la circunferencia de radio r y centro el origen, corta BP a OX en Q . Estudiar el lugar geométrico del punto S de intersección de las rectas OP y $B'Q$, al suponer que el punto P describe la circunferencia.

Probar que la tangente al lugar geométrico anterior en un punto S , corta al eje OX en el mismo punto que la tangente al círculo en el punto P correspondiente.

13 - 90.55

Hallar la ecuación de las curvas que pasan por el punto $(1,0)$, tales que la distancia de cualquier punto P de la curva al eje OY es la mitad de la distancia al origen del punto de corte con el eje OY de la recta tangente a la curva en P .

14 - 90.91

Considérese un círculo de diámetro AB centrado en el origen, y una cuerda variable del mismo, de extremos A y C . Sea D un punto de dicha cuerda tal que $DA=2DC$. Hallar el lugar geométrico del punto de intersección de las rectas OD y BC .

15 - 90.109

Calcular el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por un punto dado A y determinan sobre una recta dada r un segmento de longitud constante k .

16 – 94.1 (F)

En cada punto (x, y) de una curva $y=f(x)$, la recta tangente corta al eje OY en el punto $(0, 2xy^2)$. Hallar la expresión general de la curva.

17 – 94.4 (D)

Se da un triángulo equilátero ABC de lado a . un móvil se mueve de manera que: $MA^2+MB^2+MC^2=na^2$. ¿Qué lugar geométrico describe el punto M según los posibles valores de n ?

18 – 94.22

Sean M y N las proyecciones ortogonales de un punto P del plano sobre dos rectas fijas que forman un ángulo α . Determinar el lugar geométrico de P si el segmento MN es de longitud constante. Dar la ecuación del lugar en la referencia oblicua que definen las rectas. Encontrar las envolventes de la familia de segmentos MN.

19 – 83.46

Dada la parábola $y^2 = 2x$, la tangente en un punto P corta al eje de ordenadas en A y la normal, también en P, corta a dicho eje en B. Determinar la ecuación del lugar geométrico que describe el baricentro del triángulo PAB cuando el punto P recorre la parábola.

20 – (E)

Unimos un punto F de coordenadas $(f,0)$ con un punto C de coordenadas $(0,c)$. Desde este punto c trazamos la recta r perpendicular a FC. Si el parámetro c varía en $(-\infty, +\infty)$ se forma una familia de rectas. Determina la ecuación de su envolvente.

21 -

Dibujar la gráfica de la hipocicloide, la pericicloide y la hipotrocoide.

22 –

Dibujar la gráfica de la epicloide y la epitrocoide.